ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія «Математика». № 6/1. 2011. Вип. 16.

УДК 517.98

Н. В. Калашникова

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Знайдена множина значень $\gamma \in C$, для яких рівняння $U_1U_2U_3 = \gamma I$ з умовами $U_1^n = U_2^2 = U_3^2 = I$ має розв'язки в множині унітарних операторів. Доведено, що для будь-якого $\gamma \in C$, $|\gamma| = 1$ оператор γI можно подати як добуток чотирьох унітарних самоспряжених операторів.

Ключові слова: унітарний оператор, самоспряжений оператор, власне значення лінійного оператора.

Найдено множество значений $\gamma \in C$, для которых уравнение $U_1U_2U_3 = \gamma I$ с условиями $U_1^n = U_2^2 = U_3^2 = I$ имеет решения во множестве унитарных операторов. Доказано, что для любого $\gamma \in C$, $|\gamma| = 1$ оператор γI можно представить как произведение четырех унитарных самосопряженных операторов.

Ключевые слова: унитарный оператор, самосопряженный оператор, собственное значение линейного оператора.

We found a set of values $\gamma \in C$, for which the equation $U_1U_2U_3 = \gamma I$ with the conditions $U_1^n = U_2^2 = U_3^2 = I$ have a solution in the set of unitary operators. Proved that for any $\gamma \in C$, $|\gamma| = 1$, the operator γI can be represented as the product of four unitary selfadjoint operators.

Key words: the unitary operator, selfadjoint operator, eigenvalue of a linear operator.

Изучаемая задача теории операторов в гильбертовом пространстве возникла в теории представлений мультипликативных аналогов алгебр из [3].

Пусть $\tilde{A} = T_{m_1, m_2, \ldots, m_k}$ – звездный граф с k лучами и m_j вершинами на j-ом луче ($j = \overline{1,k}$). Требуется описать множество $V_{\tilde{A}} = \{\gamma \in \tilde{N},\ \ |\gamma| = 1$: существуют k унитарных операторов $U_1, U_2, \ldots, U_k$ со свойствами $U_j^{m_j} = I,\ \ j = \overline{1,k}$ и $U_1U_2 \cdots U_k = \gamma I\}$.

В настоящей статье мы покажем, что для диаграмм Дынкина $D_{n+2} = T_{n,2,2}$ (см. [2]) $V_{D_{n+2}} = \left\{ e^{\frac{k\pi i}{n}},\quad k = \overline{0, 2n-1} \right\}$ (теорема 1), а для расширенной диаграммы Дынкина $D_4 = T_{2.2.2.2}$ (см. [2]) $V_{\tilde{D}_4} = S^1 = \left\{ \gamma \in C \,|\, |\gamma| = 1 \right\}$ (теорема 2).

Теорема 1. *Множество значений $\gamma \in S^1$, таких что существуют унитарные операторы U_1, U_2, U_3 в гильбертовом пространстве G, удовлетворяющие условиям*

$$U_1^n = U_2^2 = U_3^2 = I, \quad U_1U_2U_3 = \gamma I,$$

совпадает с множеством $V_{D_{n+2}} = \left\{ e^{\frac{k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, 2n-1} \right\}$.

Непосредственно из [1] следуют леммы.

Лемма 1. Пусть U_1, U_2 – унитарные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве G. Тогда

$$\sigma(U_1U_2) = \sigma(U_2U_1) = \overline{\sigma(U_1U_2)}.$$

Лемма 2. Пусть оператор U в двумерном подпространстве H гильбертова пространства G в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2 пространства H имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \ (0 \le \varphi < 2\pi).$$

Тогда существуют унитарные самосопряженные операторы U_1 и U_2 в H, такие что $U = U_1U_2$.

Доказательство теоремы 1. Обозначим $W = U_2U_3$. Порядок оператора U_1 конечен, следовательно, $\sigma(U_1)$ дискретен. Пусть е – собственный вектор оператора U_1, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = e^{i\varphi_1} (0 \le \varphi_1 < 2\pi)$. Тогда $\lambda_1 \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}$. Так как $U_1W = \gamma I$, то вектор е является собственным также для оператора W. Предположим, что $We = \mu e$, где $\mu = e^{i\psi} (0 \le \psi < 2\pi)$.

1) Пусть $\mu \in R$. Тогда $\mu = \pm 1$. Если $\mu = 1$, то имеем

$$(U_1W)e = \gamma e \Rightarrow U_1e = \gamma e \Rightarrow \lambda_1 e = \gamma e \Rightarrow \gamma = \lambda_1 \Rightarrow \gamma \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}.$$

В случае $\mu = -1$ получаем

$$(U_1W)e = \gamma e \Rightarrow -U_1e = \gamma e \Rightarrow \gamma = -\lambda_1 \Rightarrow \gamma^2 \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \in \left\{ e^{\frac{k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, 2n-1} \right\}.$$

2) Пусть $\mu \in C \setminus R$. Согласно лемме 1, $\overline{\mu} \in \sigma(W)$. Следовательно, существует вектор $f \in G \setminus \{0_G\}$, такой что $Wf = \overline{\mu} f$. Вектор f является

собственным также для U_1. Предположим, что $U_1 f = \lambda_2 f$, где $\lambda_2 = e^{i\varphi_2} (0 \le \varphi_2 < 2\pi)$.

$$(U_1 W)e = \gamma e \Rightarrow \lambda_1 \mu e = \gamma e \Rightarrow \lambda_1 \mu = \gamma,$$

$$(U_1 W) f = \gamma f \Rightarrow \lambda_2 \overline{\mu} f = \gamma f \Rightarrow \lambda_2 \overline{\mu} = \gamma.$$

Пусть $\gamma = e^{i\theta} (0 \le \theta < 2\pi)$. Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1 + \psi = \theta + 2\pi k, & k \in Z, \\ \varphi_2 - \psi = \theta + 2\pi l, & l \in Z. \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим

$$2\theta = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi m, \quad m \in Z.$$

Так как $\lambda_1, \lambda_2 \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}$, то $\lambda_1 \lambda_2 \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}$.

$$\gamma^2 = e^{2i\theta},\ 2\theta = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi m, \quad m \in Z \ \Rightarrow \gamma^2 \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma \in \left\{ e^{\frac{k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, 2n-1} \right\}.$$

Покажем, что для любого элемента $\gamma \in \left\{ e^{\frac{k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, 2n-1} \right\}$ существуют унитарные операторы U_1, U_2, U_3, удовлетворяющие условиям

$$U_1^n = U_2^2 = U_3^2 = I, \quad U_1 U_2 U_3 = \gamma I.$$

Если $\gamma \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}$, то в качестве таких операторов можно взять

$$U_1 = \gamma I, \quad U_2 = U_3 = I.$$

Пусть $\gamma \in \left\{ e^{\frac{k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, 2n-1} \right\}$ и $\gamma \notin \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}$. Тогда $\gamma = e^{\frac{k\pi i}{n}}$, где k – нечетное число, $1 \le k \le 2n-1$. Рассмотрим унитарные операторы U_1 и W, заданные в двумерном подпространстве H гильбертова пространства G, которые в некотором ортонормированном базисе e_1, e_2 пространства H имеют матрицы

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{(k+1)\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{(k-1)\pi i}{n}} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi i}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\pi i}{n}} \end{pmatrix} \text{ соответственно.}$$

Тогда $U_1W = \gamma I$, $U_1^n = I$; а оператор W, согласно лемме 2, является произведением унитарных операторов U_2 и U_3, таких что $U_2^2 = U_3^2 = I$.

Следствие 1. Множество значений $\gamma \in C$, для которых существуют унитарные операторы U_1, U_2, U_3, удовлетворяющие условиям

$$U_1^2 = U_2^n = U_3^2 = I, \quad U_1U_2U_3 = \gamma I$$

или

$$U_1^2 = U_2^2 = U_3^n = I, \quad U_1U_2U_3 = \gamma I$$

совпадает с множеством $V_{D_{n+2}} = \left\{ e^{\frac{k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, 2n-1} \right\}$.

Доказательство следует из того, что для невырожденных операторов U_1, U_2, U_3 равенства $U_1U_2U_3 = \gamma I$, $U_3U_1U_2 = \gamma I$ и $U_2U_3U_1 = \gamma I$ эквивалентны.

Действительно,

$$U_1U_2U_3 = \gamma I \Leftrightarrow U_1U_2 = \gamma U_3^{-1} \Leftrightarrow U_3U_1U_2 = \gamma I,$$

$$U_1U_2U_3 = \gamma I \Leftrightarrow U_1 = \gamma U_3^{-1}U_2^{-1} \Leftrightarrow U_2U_3U_1 = \gamma I.$$

Следствие 2. Если n – нечетное натуральное число, то множество значений $\gamma \in C$, для которых существуют унитарные операторы U_1, U_2, удовлетворяющие условиям

$$U_1^n = U_2^2 = I, \quad U_1U_2 = \gamma I$$

совпадает с множеством $V_{D_{n+2}} = \left\{ e^{\frac{k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, 2n-1} \right\}$.

Доказательство. Пусть $\gamma = e^{\frac{k\pi i}{n}}$ для некоторого $0 \le k \le 2n-1$. Если k – четное, то в качестве операторов U_1 и U_2 можно взять

$$U_1 = \gamma I, \quad U_2 = I.$$

В случае, когда число k – нечетное, указанным условиям удовлетворяют, например, операторы

$$U_1 = e^{\frac{(k+n)\pi i}{n}} I, \quad U_2 = -I.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\gamma \in C$, $|\gamma| = 1$. *Тогда существуют унитарные самосопряженные операторы* U_1, U_2, U_3, U_4, *заданные в гильбертовом пространстве* G *и удовлетворяющие условию*

$$U_1U_2U_3U_4 = \gamma I.$$

Для доказательства теоремы 2 потребуется следующая лемма.

Лемма 3. Пусть оператор U, заданный в n-мерном подпространстве H гильбертова пространства G, в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства H имеет диагональную матрицу A, на главной диагонали которой находятся числа

$$\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$$

($|\lambda_i| = 1$, $i = \overline{1,k}$, $\mu_j \in \{\pm 1\}$, $j = \overline{1,m}$, $2k + m = n$), расположенные в произвольном порядке. Тогда U является произведением двух унитарных самосопряженных операторов.

Доказательство. Сделаем перестановку чисел, стоящих на главной диагонали матрицы A, так, чтобы ее элементы расположились в порядке

$$\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m.$$

Таким же образом переставим элементы базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$. В результате получим ортонормированный базис $f_1, f_2, \ldots, f_n$, матрица оператора U в котором совпадает с матрицей

$$diag(\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \lambda_2, \overline{\lambda_2}, \ldots, \lambda_k, \overline{\lambda_k}, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m).$$

Согласно лемме 2, U есть произведение двух унитарных самосопряженных операторов.

Доказательство теоремы 2. 1) Пусть $\gamma \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}$ для некоторого $n \in N$. Рассмотрим оператор V_1, заданный в n-мерном подпространстве H гильбертова пространства G, который в некотором ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства H имеет матрицу

$$A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

где $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}$. Пусть далее оператору V_2, заданному в H, в том же базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ соответствует матрица

$$B = diag(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n),$$

где $\mu_i = \gamma \overline{\lambda_i}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\} = \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}$.

$$AB = \gamma E \Rightarrow V_1 V_2 = \gamma I.$$

Матрицы операторов V_1 и V_2 в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства H имеют вид, указанный в лемме 3, следовательно, каждый из операторов V_1, V_2 является произведением двух унитарных самосопряженных операторов. Таким образом, существуют унитарные самосопряженные операторы U_1, U_2, U_3, U_4, заданные в n-мерном подпространстве H

гильбертова пространства G, удовлетворяющие условию

$$U_1U_2U_3U_4 = \gamma I.$$

2) Рассмотрим случай, когда $\gamma^n \neq 1$ при всех $n \in N$. Пусть G – сепарабельное гильбертово пространство, $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ – некоторый ортонормированный базис G. Рассмотрим операторы V_1 и V_2, заданные в G условиями

$V_1e_1 = \gamma e_1$, $V_1e_2 = \overline{\gamma}e_2$, $V_1e_3 = \gamma^3 e_3$, $V_1e_4 = \overline{\gamma^3}e_4$, $V_1e_5 = \gamma^5 e_5$, …, $V_1e_{2k-1} = \gamma^{2k-1}e_{2k-1}$, $V_1e_{2k} = \overline{\gamma^{2k-1}}e_{2k}$, …,

$V_2e_1 = e_1$, $V_2e_2 = \gamma^2 e_2$, $V_2e_3 = \overline{\gamma^2}e_3$, $V_2e_4 = \gamma^4 e_4$, $V_2e_5 = \overline{\gamma^4}e_5$, …, $V_2e_{2k-1} = \overline{\gamma^{2k-2}}e_{2k-1}$, $V_2e_{2k} = \gamma^{2k}e_{2k}$, ….

Тогда $V_1V_2 = \gamma I$ и из леммы 3 получаем, что существуют унитарные самосопряженные операторы U_1, U_2, U_3, U_4, такие что $U_1U_2 = V_1$, $U_3U_4 = V_2$, то есть

$$U_1U_2U_3U_4 = \gamma I.$$

Замечание. Если $\gamma \in \left\{ e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = \overline{0, n-1} \right\}$ для некоторого $n \in N$, то с ростом n возрастает размерность подпространства H, в котором могут быть заданы унитарные самосопряженные операторы U_1, U_2, U_3, U_4, такие что $U_1U_2U_3U_4 = \gamma I$. Действительно, пусть операторы U_1, U_2, U_3, U_4 заданы в k-мерном подпространстве H гильбертова пространства G и A – матрица оператора $U_1U_2U_3U_4$ в некотором базисе H. Так как U_1, U_2, U_3, U_4 унитарные и самосопряженные, то $\det A = \pm 1$. С другой стороны $\det A = \gamma^k$. Отсюда следует, что $k \geq n$, если n – нечетное, и $k \geq \frac{n}{2}$, если n – четное.

Библиографические ссылки

1. **Ахиезер Н. И.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман – Харків, 1977.–316 с.
2. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Ч. 4 – 6. / Н. Бурбаки – М., 1972.–334 с.
3. **Кругляк С. А.** О суммах проекторов. / С. А. Кругляк, В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко // Функц. анализ и его прил. –2002, Т. 36, вып. 3.– С. 20–35.
4. **Москалева Ю. П.** Введение в спектральную теорию графов: Учеб. пособие. / Ю. П. Москалева, Ю. С. Самойленко – К., 2007.–114 с.
5. **Рабанович В. И.** Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице. / В. И. Рабанович, Ю. С. Самойленко // Функц. анализ и его прил.–2000, Т. 34, вып. 4.– С. 91–93.

Надійшла до редколегії 17.01.10